Exercice 1:

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_H) \quad : \quad y' + y = 0$$

donc les solutions sont de la forme $y_h : x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Nous cherchons ensuite une solution particulière par variations de la constante donc sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)\mathbf{e}^{-x}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) = \lambda'(x)\mathbf{e}^{-x} - \lambda \mathbf{e}^{-x} = [\lambda(x) - \lambda'(x)]\mathbf{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) + y_p(x) = 4\mathrm{ch}(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ [\lambda'(x) - \lambda(x)]\mathbf{e}^{-x} + \lambda(x)\mathbf{e}^{-x} = 4\mathrm{ch}(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)\mathbf{e}^{-x} = 2(\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 2(\mathbf{e}^{2x} + 1)
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc prendre $\lambda : x \mapsto \mathbf{e}^{2x} + 2x$. Ainsi, la fonction $y_p : x \mapsto (\mathbf{e}^{2x} + 2x)\mathbf{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).
Pour avoir la forme générale des solutions, il reste à faire la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière

$$S_E(\mathbb{R}) = \left\{x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-x} + (\mathbf{e}^{2x} + 2x)\mathbf{e}^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Nous devons d'abord diviser toute cette équation par la quantité $1 + x^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc cela ne modifie pas l'intervalle d'étude. L'équation devient

$$(E') \quad : \quad y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation homogène associée

$$(E_H) \quad : \quad y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$$

donc les solutions sont de la forme $y_h : x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Nous cherchons ensuite une solution particulière par variations de la constante donc sous la forme
$y_p : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ où λ est une fonction dérivable.
On a $\forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) = \dfrac{\lambda'(x)\sqrt{1+x^2} - \lambda(x)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{\lambda'(x)}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{x\lambda(x)}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$.

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) + \frac{x}{1+x^2}y_p(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} + \frac{x}{1+x^2}\frac{\lambda(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 1
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc prendre $\lambda : x \mapsto x$. Ainsi, la fonction $y_p : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est une solution particulière de (E).

Pour avoir la forme générale des solutions, il reste à faire la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière

$$S_E(\mathbb{R}) = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda + x}{\sqrt{1+x^2}},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

3. La fonctions $x \mapsto 1 + \text{ch}(x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. L'équation devient

$$(E) \quad : \quad y'(x) - \frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)} y(x) = \text{sh}(x)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation homogène associée.

$$(E_H) \quad : \quad y' - \frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)} y = 0$$

L'ensemble des solutions de (E_H) est $\{x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{\ln(1+\text{ch}(x))}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \lambda(1+\text{ch}(x)), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Nous cherchons ensuite une solution particulière par variations de la constante.
Posons $y_p : x \mapsto \lambda(x)(1+\text{ch}(x))$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction y_p est alors dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) = \lambda'(x)(1+\text{ch}(x)) + \lambda(x)\text{sh}(x))$.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)(1+\text{ch}(x)) + \lambda(x)\text{sh}(x)) + -\frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}\lambda(x)(1+\text{ch}(x)) = \text{sh}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)(1+\text{ch}(x)) = \text{sh}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)} \end{aligned}$$

Pour $\lambda : x \mapsto \ln(1+\text{ch}(x))$, y_p est solution de (E).
Ainsi, la fonction $y_p : x \mapsto (1+\text{ch}(x))\ln(1+\text{ch}(x))$ est une solution particulière de (E).
Conclusion :

$$S = \{x \mapsto (\lambda + \ln(1+\text{ch}(x)))(1+\text{ch}(x)),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

4. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_H) \quad : \quad y' + \tan(x)y = 0$$

dont les solutions sont de la forme $y_h : x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{\ln(|\cos(x)|)} = \lambda\cos(x)$ car la fonction cos est positive sur I.

Nous cherchons ensuite une solution particulière par variation de la constante donc sous la forme
$y_p : x \mapsto \lambda(x)\cos(x)$ où λ est une fonction dérivable.
On a donc $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ y_p'(x) = \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x)$.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ y_p'(x) + \tan(x)y_p(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x) + \tan(x)\lambda(x)\cos(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \lambda'(x)\cos(x) - \lambda(x)\sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\lambda(x)\cos(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \lambda'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \end{aligned}$$

On doit donc trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$$\int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cos(t)}{1-\sin^2(t)}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\varphi'(t)}{1-(\varphi(t))^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u$$

par la formule de changement de variable pour $u = \sin(t)$. Puis,

$$\forall u \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u &= \int_0^{\sin(x)} \left(\frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{2(1-u)}\mathrm{d}u + \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{2(1+u)}\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{-\ln(|1-u|)}{2} + \frac{\ln((|1+u|)}{2}\right]_0^{\sin(x)} = \frac{-\ln(|1-\sin(x)|) + \ln(|1+\sin(x)|)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1+\sin(x)|}{|1-\sin(x)|}\right)
\end{aligned}$$

Une solution particulière est donc de la forme $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)\cos(x)$ et les solutions générales

$$S_E(\mathbb{R}) = \left\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)\cos(x),\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 2:

1. Nous devons diviser par le terme $\mathrm{ch}(x)$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. L'équation devient

$$y' + \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}y = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants homogène. Les solutions sont de la forme

$$y_h : x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-\ln(\mathrm{ch}(x))} = \frac{\lambda}{\mathrm{ch}(x)} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On sait qu'il existe une unique solution vérifiant $y(0) = 1$. Or, $y_h(0) = \dfrac{\lambda}{1}$ donc l'unique solution est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.

2. Cette équation a la même équation homogène associée que l'équation de la question précédente. Donc, on sait que les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_h : x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-\ln(\mathrm{ch}(x))} = \frac{\lambda}{\mathrm{ch}(x)} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Nous cherchons ensuite une solution particulière par la méthode de la variation de la constante donc sous la forme $y_p : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ où λ est une fonction dérivable.

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p'(x) = \dfrac{\lambda'(x)\mathrm{ch}(x) - \lambda(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \dfrac{\lambda'(x)}{\mathrm{ch}(x)} - \dfrac{\lambda(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) + \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}y_p(x) = x\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda'(x)}{\mathrm{ch}(x)} - \frac{\lambda(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} + \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\frac{\lambda(x)}{\mathrm{ch}(x)} = x\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda'(x)}{\mathrm{ch}(x)} = x\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = x\mathrm{sh}(x)
\end{aligned}$$

Par une intégration par parties,

$$\int^x t\mathrm{sh}(t)\mathrm{d}t = [t\mathrm{ch}(t)]^x - \int^x \mathrm{ch}(t)\mathrm{d}t$$

donc on peut prendre $\lambda : x \mapsto x\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$. Ainsi, la fonction $y_p : x \mapsto \dfrac{x\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = x - \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ est une solution particulière de l'équation (E). Les solution générales sont de la forme

$$y_E : x \mapsto \frac{\lambda}{\mathrm{ch}(x)} + x - \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Or, $y_E(0) = \lambda$ donc l'unique fonction qui prend la valeur 1 en 0 est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} + x - \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

<u>Exercice 3</u>: Soit $(E) : xy' - \alpha y = 0$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

$$S_{E_2}(]0, +\infty[) = \left\{x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{2\ln(x)} = \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$S_{E_2}(]-\infty, 0[) = \left\{x \mapsto \mu \mathbf{e}^{2\ln(-x)} = \mu x^2,\ \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

2. y solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \lambda x^2 \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = \mu x^2 \text{ où } \mu \in \mathbb{R} \\ y \text{ est dérivable en } 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soit y une telle fonction. y est dérivable en 0 si et seulement si les dérivées en 0 à gauche et à droite existent et coïncident. Or $\frac{y(x)-y(0)}{x-0} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{y(x)-y(0)}{x-0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Donc y est dérivable en 0.
D'où

$$S_{E_2}(\mathbb{R}) = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ \mu x^2 \text{ sinon} \end{cases},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

3. On résout pour $\alpha \neq 0$, (le cas $\alpha = 0$ peut se traiter facilement à part).

$$S_{E_\alpha}(]0, +\infty[) = \left\{x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{\alpha\ln(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$S_{E_\alpha}(]-\infty, 0[) = \left\{x \mapsto \mu \mathbf{e}^{\alpha\ln(-x)},\ \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

y solution de (E_α) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \lambda \mathbf{e}^{\alpha\ln(x)} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, y(x) = \mu \mathbf{e}^{\alpha\ln(-x)} \text{ où } \mu \in \mathbb{R} \\ y \text{ est dérivable en } 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soit y une telle fonction. y est dérivable en 0 si et seulement si les dérivées en 0 à gauche et à droite existent et coïncident. Or pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$\text{si } \mu \neq 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = -\mu \mathbf{e}^{\alpha \ln(-x) - \ln(-x)} = -\mu \mathbf{e}^{(\alpha-1)\ln(-x)} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha - 1 > 0 \text{ i.e. } \alpha > 1 \\ -\mu \text{ si } \alpha - 1 = 0 \text{ i.e. } \alpha = 1 \\ \pm\infty \text{ si } \alpha - 1 < 0 \text{ i.e. } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\text{si } \mu = 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\text{si } \lambda \neq 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lambda \mathbf{e}^{\alpha \ln(x) - \ln(x)} = \lambda \mathbf{e}^{(\alpha-1)\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha - 1 > 0 \text{ i.e. } \alpha > 1 \\ \lambda \text{ si } \alpha - 1 = 0 \text{ i.e. } \alpha = 1 \\ \pm\infty \text{ si } \alpha - 1 < 0 \text{ i.e. } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\text{si } \lambda = 0,\ \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = 0$$

Pour $\alpha > 1$,

$$S_{E_\alpha}(\mathbb{R}) = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda \mathbf{e}^{\alpha \ln(x)} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \mu \mathbf{e}^{\alpha \ln(-x)} \text{ si } x < 0 \end{cases},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} S_{E_1}(\mathbb{R}) &= \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda \mathbf{e}^{\ln(x)} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -\lambda \mathbf{e}^{\ln(-x)} \text{ si } x < 0 \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Pour $\alpha < 1$,

$$S_{E_\alpha}(\mathbb{R}) = \{x \mapsto 0\}$$

<u>Exercice 4</u>: On s'intéresse à l'équation suivante :

$$(1-x^2)y' - 2xy = x^2$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre. Nous devons diviser l'équation par la quantité $1 - x^2$ qui s'annule en -1 et en 1 d'où la réduction de l'ensemble de résolution. L'équation qui nous intéresse est donc

$$y' - \frac{2x}{1-x^2}y = \frac{x^2}{1-x^2}$$

L'équation homogène associée est

$$(E_H)\ :\ y' - \frac{2x}{1-x^2}y = 0$$

1. <u>Sur $I =]-\infty, -1[$:</u>
   Les solutions de (E_H) sont de la forme $y_h : x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-\ln(|1-x^2|)} = \dfrac{\lambda}{x^2-1}$ puisque nous sommes sur $]-\infty, -1[$.
   Nous cherchons ensuite une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x^2-1}$ par la méthode de la variation de la constante où λ est une fonction dérivable.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty, -1[, y_p'(x) - \frac{2x}{1-x^2} y_p(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty, -1[, \frac{\lambda'(x)(x^2-1) - 2x\lambda(x)}{(x^2-1)^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{\lambda(x)}{x^2-1} = \frac{x^2}{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty, -1[, \lambda'(x) = -x^2 \end{aligned}$$

   La fonction $y_p : x \mapsto \dfrac{-x^3}{3(x^2-1)}$ est une solution particulière sur $]-\infty : -1[$.

$$S_E(]-\infty; -1[) = \left\{ x \mapsto \frac{3\lambda_1 - x^3}{3(x^2-1)} \ , \ \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

2. <u>Sur $I =]-1, 1[$:</u>
   Les solutions de (E_H) sont de la forme $y_h(x) = \lambda \mathbf{e}^{-\ln(|1-x^2|)} = \dfrac{\lambda}{1-x^2}$ puisque nous sommes sur $]-1, 1[$.
   Nous cherchons ensuite une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1-x^2}$ par la méthode de la variation de la constante.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in]-1, 1[, y_p'(x) - \frac{2x}{1-x^2} y_p(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-1, 1[, \frac{\lambda'(x)(1-x^2) + 2x\lambda(x)}{(1-x^2)^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{\lambda(x)}{x^2-1} = \frac{x^2}{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-1, 1[, \lambda'(x) = x^2 \end{aligned}$$

   La fonction $y_p : x \mapsto \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$ est une solution particulière sur $]-1; 1[$.

$$S_E(]-1; 1[) = \left\{ x \mapsto \frac{3\lambda_2 + x^3}{3(1-x^2)} \ , \ \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Résolvons cette équation sur $]-\infty; 1[$.
   Nous ne pouvons pas résoudre l'équation sur cet intervalle par les méthodes classiques puisque la quantité $1-x^2$ par laquelle nous devons diviser s'annule.
   Soit y une solution de (E) sur $]-\infty; 1[$. Puisque y est solution également sur $]-\infty; -1[$, elle est de la forme des solutions sur $]-\infty; -1[$. De même, y est solution également sur $]-1; 1[$, elle est de la forme des solutions sur $]-1; 1[$ donc

$$\begin{cases} \exists\, \lambda_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty; -1[\ ,\ y(x) = \frac{3\lambda_1 - x^3}{3(x^2-1)} \\ \exists\, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1; 1[\ ,\ y(x) = \frac{3\lambda_2 + x^3}{3(1-x^2)} \end{cases}$$

   Nous devons alors regarder s'il est possible de raccorder ces deux fonctions en $x = -1$.

$$\text{Considérons } \lim_{x \to (-1)^-} \frac{3\lambda_1 - x^3}{3(x^2-1)} \text{ et } \lim_{x \to (-1)^+} \frac{3\lambda_2 + x^3}{3(1-x^2)}.$$

Pour que ces limites soient finies, on doit prendre $\lambda_1 = \dfrac{-1}{3}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{3}$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{3\lambda_1 - x^3}{3(x^2-1)} = \dfrac{-1-x^3}{3(x^2-1)} & = & \dfrac{-(x+1)(x^2-x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \dfrac{x^2-x+1}{3(1-x)} \text{ et } \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{3\lambda_1 - x^3}{3(x^2-1)} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3\lambda_2 + x^3}{3(1-x^2)} = \dfrac{1+x^3}{3(1-x)(1+x)} & = & \dfrac{(1+x)(x^2-x+1)}{3(1-x)(1+x)} = \dfrac{x^2-x+1}{3(1-x)} \text{ et } \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{3\lambda_2 + x^3}{3(1-x^2)} = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

De plus, afin que l'équation différentielle soit vérifiée on doit avoir $y(-1) = \dfrac{1}{2}$ donc une telle fonction est bien continue en -1.
Il faut maintenant montrer que ce raccord est dérivable en $x = -1$ car la fonction y doit être dérivable sur $]-\infty, 1[$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{y(x)-y(-1)}{x+1} = \dfrac{\frac{x^2-x+1}{3(1-x)} - \frac{1}{2}}{x+1} & = & \dfrac{2x^2+x-1}{6(x+1)(1-x)} = \dfrac{2x-1}{6} \\ \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+x-1}{3(x+1)(1-x)} & = & \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

Cette fonction est dérivable en -1. C'est l'unique solution sur $]-\infty; 1[$.

Exercice 5:

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_H) \quad : \quad y'' - 4y' + 4y = 0$$

dont l'équation caractéristique est $x^2 - 4x + 4 = 0$, c'est-à-dire $(x-2)^2 = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_h : x \mapsto (Ax+B)\mathbf{e}^{2x}, \ \ (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Nous devons maintenant chercher une solution particulière. Nous allons la chercher sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{\mathbf{i}x}$ puis nous ne garderons que la partie imaginaire de cette solution.

$$\begin{array}{rcl} y_p \text{ est solution de (E)} & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\, y_p''(x) - 4y_p'(x) + 4y_p(x) = \mathbf{e}^{ix} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\, (-\lambda - 4\mathbf{i}\lambda + 4\lambda)\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} = \mathbf{e}^{ix} \\ & \Leftrightarrow & 3\lambda - 4\mathbf{i}\lambda = 1 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = \dfrac{1}{3-4\mathbf{i}} = \dfrac{3+4\mathbf{i}}{25} \end{array}$$

Nous pouvons donc prendre comme solution particulière $y_p : x \mapsto \mathrm{Im}\left(\dfrac{3+4\mathbf{i}}{25}\mathbf{e}^{\mathbf{i}x}\right) = \dfrac{3}{25}\sin(x) + \dfrac{4}{25}\cos(x)$.
Pour avoir la forme générale des solutions, il reste à faire la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière

$$S_E(\mathbb{R}) = \left\{ x \mapsto (Ax+B)\mathbf{e}^{2x} + \frac{3}{25}\sin(x) + \frac{4}{25}\cos(x),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_H) \quad : \quad y'' - y' - 6y = 0$$

dont l'équation caractéristique est $x^2 - x - 6 = 0$, dont le discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_h : x \mapsto A\mathbf{e}^{-2x} + B\mathbf{e}^{3x}, \ \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Nous devons maintenant chercher une solution particulière. Par le principe de superposition, nous allons chercher une solution particulière pour chacune des équations

$$\begin{array}{rcl} (E_1) & : & y'' - y' - 6y = \mathbf{e}^{3x} \\ (E_2) & : & y'' - y' - 6y = \sin(x) \end{array}$$

et nous obtiendrons une solution particulière de (E) en additionnant ces deux solutions particulières.

Puisque 3 est racine du polynôme caractéristique, nous cherchons une solution particulière de (E_1) sous la forme $y_{p_1} : x \mapsto \lambda x\mathbf{e}^{3x}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_{p_1}(x) = \lambda\mathbf{e}^{3x} + 3\lambda x\mathbf{e}^{3x} = (\lambda + 3\lambda x)\mathbf{e}^{3x}$ et
$y''_{p_1}(x) = 3\lambda\mathbf{e}^{3x} + 3(\lambda + 3\lambda x)\mathbf{e}^{3x} = (6\lambda + 9x\lambda)\mathbf{e}^{3x}$

$$\begin{aligned} y_{p_1} \text{ est solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y''_{p_1}(x) - y'_{p_1}(x) - 6y_{p_1}(x) = \mathbf{e}^{3x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (6\lambda + 9x\lambda - (\lambda + 3\lambda x) - 6\lambda x)\mathbf{e}^{3x} = \mathbf{e}^{3x} \\ &\Leftrightarrow 5\lambda = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

La fonction $y_{p_1} : x \mapsto \dfrac{x}{5}\mathbf{e}^{3x}$ est solution particulière de (E_1).

Puisque $\mathbf{i}$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, nous cherchons une solution particulière de (E_2) sous la forme $y_{p_2}(x) = \lambda\mathbf{e}^{\mathbf{i}x}$ et nous garderons sa partie imaginaire.

$$\begin{aligned} y_{p_2} \text{ est solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, y''_p(x) - y'(x) - 6y(x) = \mathbf{e}^{ix} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ (-\lambda - \mathbf{i}\lambda - 6\lambda)\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} = \mathbf{e}^{ix} \\ &\Leftrightarrow \quad -7\lambda - \mathbf{i}\lambda = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{-7 - \mathbf{i}} = \frac{-7 + \mathbf{i}}{50} \end{aligned}$$

La fonction $\mathrm{Im}(y_{p_2}) : x \mapsto \dfrac{-7}{50}\sin(x) + \dfrac{1}{50}\cos(x)$ est solution de (E_2).
Pour avoir la forme générale des solutions, il reste à faire la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière

$$S_E(\mathbb{R}) = \left\{ x \mapsto A\mathbf{e}^{-2x} + B\mathbf{e}^{3x} + \frac{x}{5}\mathbf{e}^{3x} - \frac{7}{50}\sin(x) + \frac{1}{50}\cos(x),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. Nous allons d'abord résoudre l'équation homogène associée

$$(E_H) \ : \ y'' - 3y' + 4y = 0$$

L'équation caractéristique associée est : $x^2 - 3x + 4 = 0$ dont les racines sont $x_1 = \dfrac{3 + \mathbf{i}\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 - \mathbf{i}\sqrt{7}}{2}$. Les solutions de cette équations sont de la forme

$$y_h : x \mapsto \mathbf{e}^{\frac{3x}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \right) \ \ , \ \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Nous devons maintenant trouver une solution particulière à cette équation. Par le principe de superposition, nous allons chercher une solution particulière pour chacune des équations suivantes:

$$\begin{aligned}(E_1) &\ :\ y'' - 3y' + 4y = 6x + 1\\ (E_2) &\ :\ y'' - 3y' + 4y = 7\mathbf{e}^{-x}\end{aligned}$$

En les additionnant, nous trouverons une solution particulière à l'équation (E).

Pour (E_1): Puisque le second membre est un polynôme de degré 1, nous allons chercher une solution particulière sous la forme $y_{p_1} : x \mapsto ax + b$ pour laquelle $y'_{p_1} = a$ et $y''_{p_1} = 0$.

$$\begin{aligned} y_{p_1} \text{ solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y''_{p_1}(x) - 3y'_{p_1}(x) + 4y_{p_1}(x) = 6x + 1\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -3a + 4(ax + b) = 6x + 1\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 6\\ 4b - 3a = 1\end{cases}\end{aligned}$$

$y_{p_1} : x \mapsto \dfrac{3x}{2} + \dfrac{11}{8}$ est une solution particulière pour (E_1).

Pour (E_2): Puisque le second membre est de la forme $7\mathbf{e}^{-x}$ et que -1 n'est pas solution du polynôme caractéristique, nous allons chercher une solution particulière sous la forme $y_{p_2} : x \mapsto A\mathbf{e}^{-x}$ pour laquelle $y'_{p_2} : x \mapsto -A\mathbf{e}^{-x}$ et $y''_{p_2} : x \mapsto A\mathbf{e}^{-x}$.

$$y_{p_1} \text{ solution de } (E_2) \ \Leftrightarrow\ 8A = 7$$

D'où $y_{p_2} : x \mapsto \dfrac{7}{8}\mathbf{e}^{-x}$ est une solution particulière pour (E_2).

Par le principe de superposition, la fonction $y_p : x \mapsto \frac{3x}{2} + \frac{11}{8} + \frac{7}{8}\mathbf{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E). Par somme, l'ensemble des solutions de (E) est de la forme

$$S_E(\mathbb{R}) = \left\{ x \mapsto \mathbf{e}^{\frac{3x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right) + \frac{3x}{2} + \frac{11}{8} + \frac{7}{8}\mathbf{e}^{-x}\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 6:

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients complexes.

$$(E)\ :\ y'' - y' + (1 - \mathbf{i})y = 0$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - r + (1 - \mathbf{i}) = 0$ dont les racines sont $r_1 = -\mathbf{i}$ et $r_2 = 1 + \mathbf{i}$. Les solutions de cette équation sont de la forme

$$y : x \mapsto A\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x} + B\mathbf{e}^{(1+\mathbf{i})x} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients complexes avec second membre.

$$(E_H)\ :\ y'' - 4\mathbf{i}y' - 3y = 0$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4\mathbf{i}r - 3 = 0$ dont les racines sont $r_1 = \mathbf{i}$ et $r_2 = 3\mathbf{i}$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y : x \mapsto A\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + B\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$

On cherche une solution particulière de

$$(E_1) : y'' - 4\mathbf{i}y' - 3y = \frac{1}{2\mathbf{i}}\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} \text{ et } (E_2) : y'' - 4\mathbf{i}y' - 3y = -\frac{1}{2\mathbf{i}}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}$$

Pour (E_1), on la cherche sous la forme $x \mapsto C_1 x\mathbf{e}^{\mathbf{i}x}$ et pour (E_2), on la cherche sous la forme $x \mapsto C_2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}$.
On cherche donc C_1 et C_2 complexes vérifiant pour tout réel x,

$$C_1\left((2\mathbf{i} - x) - 4\mathbf{i}(1 + \mathbf{i}x) - 3x\right) = \frac{1}{2\mathbf{i}} \text{ et . } C_2\left(-1 - 4\mathbf{i}(-\mathbf{i}) - 3\right) = -\frac{1}{2\mathbf{i}}$$

Donc $C_1 = \frac{1}{4}$ et $C_2 = \frac{1}{16\mathbf{i}} = -\frac{1}{16}\mathbf{i}$.
D'où, par principe de superposition, $x \mapsto \frac{1}{4}x\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \frac{1}{16}\mathbf{i}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}$ est solution de l'équation de base.
Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y : x \mapsto A\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + B\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} + \frac{1}{4}x\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \frac{1}{16}\mathbf{i}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$

Exercice 7: Puisque les 2 fonctions x et y sont inconnues, nous ne pouvons pas résoudre chacune des équations 1 et 2.
Les fonctions x' et y' sont des combinaisons linéaires de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} x'' &= x' + y' = x + y + x - y = 2x \\ y'' &= x' - y' = x + y - (x - y) = 2y \end{aligned}$$

donc les fonctions x et y sont toutes les deux solutions de l'équation

$$(E) \ , \ f'' - 2f = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients constants. Les solutions sont de la forme

$$\begin{gathered} t \mapsto A\mathbf{e}^{\sqrt{2}t} + B\mathbf{e}^{-\sqrt{2}t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \\ \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x : t \mapsto A\mathbf{e}^{\sqrt{2}t} + B\mathbf{e}^{-\sqrt{2}t} \\ \exists (C, D) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y : t \mapsto C\mathbf{e}^{\sqrt{2}t} + D\mathbf{e}^{-\sqrt{2}t} \end{gathered}$$

Il reste à déterminer les quatre constantes à partir des conditions initiales.

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ C + D = 1 \\ A\sqrt{2} - B\sqrt{2} = 1 \\ C\sqrt{2} - D\sqrt{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ C = 1 - D \\ -2B\sqrt{2} = 1 \\ \sqrt{2} - 2D\sqrt{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ C = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ B = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ D = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$x : t \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{sh}(\sqrt{2}t) \text{ et } y : t \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{sh}(\sqrt{2}t)$$

Ces fonctions sont bien solutions du problème posé.

Exercice 8: On a que f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f''(x) = \frac{-1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}f(x)$$

La fonction g est deux fois dérivable comme composée de fonctions deux fois dérivables et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = \mathbf{e}^t f'(\mathbf{e}^t) \text{ et } g''(t) = \mathbf{e}^t f'(\mathbf{e}^t) + \mathbf{e}^{2t} f''(\mathbf{e}^t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) - g'(t) + g(t) = \mathbf{e}^t f'(\mathbf{e}^t) + \mathbf{e}^{2t} f''(\mathbf{e}^t) - \mathbf{e}^t f'(\mathbf{e}^t) + f(\mathbf{e}^t) = \mathbf{e}^{2t} f''(\mathbf{e}^t) + f(\mathbf{e}^t) = 0$$

La dernière égalité vient de l'équation dont f est solution.
g est solution d'une EDL du second ordre à coefficients constants homogène.
Donc, $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \mathbf{e}^{\frac{t}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \mathbf{e}^{\frac{\ln(x)}{2}} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right)$.
On a $f'(1) = f(1)$, on en déduit des conditions sur A et B : $A = \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B$ i.e. $A = \sqrt{3}B$.
On trouve donc $f : x \mapsto 2B\sqrt{x} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) \right) \right) = 2B\sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x) - \frac{\pi}{6} \right)$ et on peut vérifier que f est bien solution du problème posé.